Esercizio 04

Caratterizzazione di un motore in corrente continua ad eccitazione separata

LS STUDIO

Ver. 1.0

info@lsstudio.it

Indice

1 Caratterizzazione di un motore in corrente continua ad eccitazione separata

La caratterizzazione di una funzione di trasferimento di un motore in corrente continua con controllo di armatura connesso ad un carico può essere ottenuta grazie a misure. La posizione angolare dipendente della tensione applicata viene descritta, secondo un modello ricavabile analiticamente, dalla formula seguente:

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{k_m}{s(\tau_m s + 1)} \tag{1}$$

Da misure effettuate, considerando lo schema di figura 1 e applicando una tensione di $100V$, dopo 1.9 secondi l'albero ha compiuto 710 gradi mentre dopo 2.1 secondi 785 gradi. La velocità a regime è di 1500 giri al minuto.

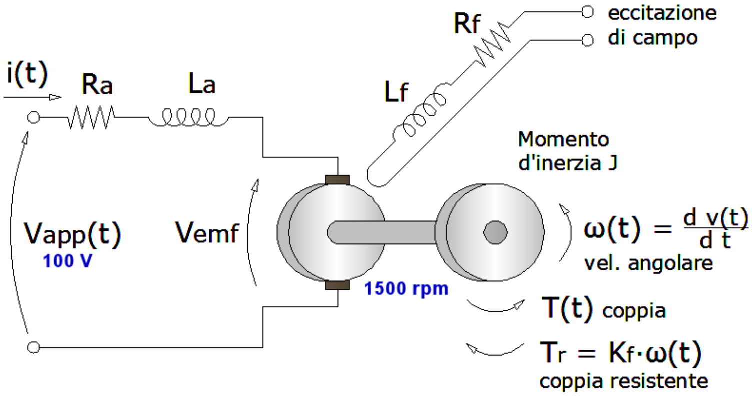

Figura 1: Controllo di Armatura

Riassumendo le misure sono:

$$\begin{cases} 710° \,@\, 1.9s \\ 785° \,@\, 2.1s \\ 1500\, rpm \,@\, \infty s \end{cases}$$

Si cercherà ora di caratterizzare la funzione di trasferimento per tale motore.

La velocità di regime espressa in radianti al secondo è pari a $157.08\ rad/s$. A partire dalla struttura (1) che descrive il rapporto tra la posizione angolare e la tensione applicata è possibile ricavare la velocità angolare calcolando la derivata e tenendo presente che il motore era partito con condizioni nulle. Si ha allora:

$$L\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right] = \Omega(s) = s \cdot \frac{k_m}{s(\tau_m s + 1)} U(s) = \frac{k_m}{(\tau_m s + 1)} U(s) \tag{2}$$

Grazie al teorema del valore finale è possibile calcolare il valore di regime ponendo come ingresso la tensione a gradino $U(s) = 100/s$ per cui si ha:

$$\Omega(\infty) = \lim_{s \to o} s \cdot \Omega(s) \cdot U(s) = \lim_{s \to o} s \cdot \frac{k_m}{(\tau_m s + 1)} \cdot \frac{100}{s} = \lim_{s \to o} \frac{k_m}{(\tau_m s + 1)} = 100 k_m \tag{3}$$

Grazie alla (3) si ricava l'equazione $157.08 = 100k_m$ per cui

$$k_m = \frac{157.08}{100} = 1.5708 \tag{4}$$

Ora resta da determinare la costante di tempo. Siccome si hanno due campionamenti (sufficientemente vicini) della posizione angolare è possibile ricavare una stima per interpolazione della velocità angolare nell'istante dei due secondi dopo la partenza.

$$\omega(2) = \frac{785 - 710}{2.1 - 1.9} = \frac{75}{0.2} = 375\, gradi/s = 6.545\, rad/s \tag{5}$$

Chiaramente la stima risulta essere tanto più vicina al valore vero quanto più piccolo è l'intervallo di campionamento.
Antitrasformando la risposta (2) con $U(s) = 100/s$ si ha:

$$\begin{aligned}\theta(t) = L^{-1}\left[\frac{k_m}{\tau_m s + 1} \cdot \frac{100}{s}\right] &= L^{-1}\left[\frac{A}{\tau_m s + 1} + \frac{B}{s}\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{As + B(\tau_m s + 1)}{s(\tau_m s + 1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{As + B\tau_m s + B}{s(\tau_m s + 1)}\right]\end{aligned}$$

Per cui eguagliando gli elementi al numeratore secondo gli addendi di pari grado si pone il sistema:

$$\begin{cases} A + B\tau_m = 0 \\ B = 100k_m \end{cases}$$

per cui banalmente:

$$A = -B\tau_m = -100k_m\tau_m$$

e quindi continuando a fare i conti per l'antitrasformata:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= L^{-1}\left[\frac{A}{\tau_m s + 1} + \frac{B}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{-100k_m\tau_m}{\tau_m s + 1} + \frac{100k_m}{s}\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{-100k_m\tau_m}{\tau_m s + 1}\right] + L^{-1}\left[\frac{100k_m}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{-100k_m}{s + \frac{1}{\tau_m}}\right] + L^{-1}\left[\frac{100k_m}{s}\right] \\ &= -100k_m e^{-\frac{t}{\tau_m}} + 100k_m = 100k_m\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right)\end{aligned}$$

ovvero

$$\omega(t) = 157.08\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right) \tag{6}$$

Si tratta della stessa struttura matematica che descrive la carica di un condensatore, del riscaldamento di un corpo, ecc. Grazie alla misura fatta nell'equazione (5) è possibile ricavare la costante di tempo τ_m come di seguito indicato:

$$\omega(2) = 6.545 = 157.08\left(1 - e^{-\frac{2}{\tau_m}}\right)$$

Esplicitando l'esponenziale si ha:

$$e^{-\frac{2}{\tau_m}} = \frac{157.08 - 6.545}{157.08} = 0.9583$$

Passando ai logaritmi naturali e ricavando la costante di tempo si ha:

$$-\frac{2}{\tau_m} = \ln(0.9583) \quad \rightarrow \quad \tau_m = \frac{-2}{ln(0.9583)} \cong 46.6 \tag{7}$$

Concludendo, la funzione di trasferimento per il dato motore, in seguito ai risultati delle equazioni (4) e (7) risulta essere:

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{1.5708}{s(46.6s+1)}$$